Análisis Funcional – Evaluación Especial

1. Prueba que la aplicación $\Phi : \ell_1 \to c^*$ definida por

$$[\Phi y](x) = y(1) \operatorname{lím} \{x(n)\} + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n+1) \quad (x \in c, y \in \ell_1)$$

   es un isomorfismo isométrico.

2. a) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $C_1 \subset C_2$ conjuntos no vacíos, convexos y cerrados. Para $x \in \mathcal{H}$ sean $P_1 x$ y $P_2 x$ las proyecciones de x sobre C_1 y C_2 respectivamente. Prueba que

$$\|P_1 x - P_2 x\|^2 \leqslant 2\|x - P_1 x\|^2 - 2\|x - P_2 x\|^2$$

   b) Sea $\{C_n\}$ una sucesión creciente de conjuntos no vacíos, cerrado y convexos de $\mathcal{H}$. Para $x \in \mathcal{H}$ sea $P_n x$ la proyección de x sobre C_n. Sea $C = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$. Prueba que C es convexo y que si Px es la proyección de x sobre C se verifica que $\{P_n x\} \to Px$.

   Sugerencia. Para a) usa la identidad del paralelogramo. Para b) prueba que $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{lím} \operatorname{dist}(x, C_n)$ y usa el punto a)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \ell_\infty \to \mathbb{K}$ el funcional definido por

$$f_n(x) = \frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}{n} \quad (x \in \ell_\infty)$$

   Sea $M = \{x \in \ell_\infty : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$ y definamos $F : M \to \mathbb{K}$ por $F(x) = \operatorname{lím} \{f_n(x)\}$ para todo $x \in M$.

   a) Prueba que $f_n \in \ell_\infty^*$ y que $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Prueba que M es un subespacio vectorial cerrado de ℓ_∞ que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes.

   c) Prueba que $F \in M^*$ con $\|F\| = 1$ y que $F(x) = \operatorname{lím}\{x_n\}$ para todo $x \in c$.

   d) Sea $\tau(x) = (x(2), x(3), \dots)$ para todo $x \in \ell_\infty$. Prueba que $x - \tau(x) \in \ker(F) \subset M$ para todo $x \in \ell_\infty$.

   e) Deduce que existe $S \in \ell_\infty^*$, extensión de F, tal que $\|S\| = 1$ y $S(x) = S(\tau^n(x))$ para todo $x \in \ell_\infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

   f) Prueba que $S(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots) = \frac{1}{4}$. ¿Cuánto vale $S(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$?